FUNZIONI CONTINUE

DEFINIZIONE

- $f:E\to F$ con E,F spazi metrici, $x_0\in E$, f si dice continua in x_0 se:
  - x_0 è un punto isolato
  - x è un punto di accumulazione e $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\in F$
- f è continua in x_0 ⇔ $\forall V$ intorno di $f(x_0)$ $\exists U$ intorno di x_0 tale che $f(U)\subseteq V$
- f si dice continua su $E'\subseteq E$ se è continua $\forall x_0\in E'$
- I intervallo $f:I\to\mathbb{R}$ è continua se $\forall x\in I$ vale: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $\forall y\in I$ $(|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon)$

PROPRIETÀ

- ALGEBRICHE
  - $f,g:E\to\mathbb{R}$ continue in x_0, allora sono continue in x_0 anche
    - $f\pm g$
    - $f\cdot g$
    - f/g se $g(x_0)\neq0$
    - $c\cdot f$ $\forall c\in\mathbb{R}$
- TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO
  - $f(x)$ continua in x_0 con $f(x_0)>0$ ⇒ $\exists U$ intorno di x_0 tale che $f(x)>0$ $\forall x\in U$
- INSIEME DELLE FUNZIONI CONTINUE
  - $\{f:E\to\mathbb{R} \mid f \text{ è continua}\}:=C(E)$, o $C^0(E)$, è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione infinita
- TEOREMA DI COMPOSIZIONE
  - $f:E\setminus\{x_0\}\to F$, E,F spazi metrici, x_0 pt. di acc. $\lim_{x\to x_0} f(x)=y_0$, $g:F\to G$ continua in y_0 ⇒ la funzione $g\circ f:E\setminus\{x_0\}\to G$ ha limite in x_0 e si ha $\lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x)=g(y_0)$, cioè $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{y\to y_0} g(y)$
    - Sia V intorno di $g(y_0)$ ⇒ $\exists U$ intorno di y_0 tale che $g(U)\subseteq V$ ⇒ $\exists W$ intorno di x_0 tale che $f(W)\subseteq U$ ⇒ $(g\circ f)(W)\subseteq V$
  - Con questo teorema possiamo fare la sostituzione nei limiti $y=f(x)$
  - COROLLARIO
    - $f: E\to F$ continua in x_0, $g:F\to G$ continua in $f(x_0)$
      - ⇒ $g\circ f$ continua in x_0
- TEOREMA DI WEIRSTRASS
  - $f:E\to\mathbb{R}$ continua, E spazio metrico compatto ⇒ f ammette MASSIMO e MINIMO
    - Si mostra che $\exists x_m$ di minimo, la dimostrazione del massimo è analoga
    - $\ell=\inf f(x)$, $y_n\in f(E)$ con $y_n\to\ell$ ⇒ $y_n=f(x_n)$ per qualche $x_n\in E$ ma siccome E è compatto ci sarà una sottosuccessione convergente a $x_m\in E$ e siccome f è continua $f(x_m)=\lim f(x_{n_k})=\lim y_{n_k}=\ell$
- TEOREMA DEGLI ZERI
  - $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, $f(a)\cdot f(b)<0$ ⇒ $\exists x_0\in(a,b)$ tc $f(x_0)=0$
- TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI
  - $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua ⇒
    - $f([a,b])\supseteq[\min(f(a),f(b)), \max(f(a),f(b))]$
    - $f([a,b])=[\min(f), \max(f)]$
- f continua
  - manda connessi (per archi) in connessi (per archi)
  - manda intervalli in intervalli
  - + invertibile ⇒ f^{-1} continua

FUNZIONI LIPSCHITZIANE

- DEFINIZIONE
  - $f:E\to\mathbb{R}$, f è L-Lipschitziana ⇔ $|f(x)-f(y)|\leq Ld(x,y)$ $\forall x,y\in E$
- CONTINUITÀ
  - f L-Lip. ⇒ f continua
    - Basta dimostrare che $\lim_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)|=0$
    - $0\leq|f(x)-f(x_0)|\leq Ld(x,y)$
      - $0\leq$: per il valore assoluto
      - $\leq Ld(x,y)$: per definizione di Lip.
    - Passando al limite si ha: $\lim 0=0\leq\lim|f(x)-f(x_0)| =\ell\leq\lim L|x-x_0|=0$
    - Per i 2 carabinieri: $\ell=0$
- LOCALMENTE LIP.
  - $f:E\to\mathbb{R}$ è localmente Lipschitziana ⇔ $\forall a\in E$ $\exists L>0$, $\exists U$ intorno di a tale che $f|_U$ è L-Lip.
  - f localmente Lip. ⇒ f continua
    - $a\in E$, U int. di a, $L>0$, $f|_U$ è L-Lip. ⇒ $\lim_{x\to a} f(x)-f(a)=0$ ⇒ f è continua
- ESEMPI
  - $x\mapsto\sqrt{x}$
    - Non è Lip. su $[0,+\infty)$ e nemmeno $(0,+\infty)$
      - $1/\sqrt{x}\to+\infty$ per $x\to0$
    - È loc. Lip. su $(0,+\infty)$ e continua su $[0,+\infty)$
      - se $x_0>0$ $[a,+\infty)$ è intorno di x_0 su cui f è L-Lip ⇒ f è loc. Lip. su $(0,+\infty)$
    - È L-Lip. su $[a,+\infty)$ con $a>0$ e $L=1/2\sqrt{a}$

UNIFORME CONTINUITÀ

- DEFINIZIONE
  - I intervallo $f:I\to\mathbb{R}$ è uniformemente continua ⟺ $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $\forall x,y\in I$ $(|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon)$
- SIGNIFICATO GEOMETRICO
  - Dal punto di vista geometrico vuol dire che una funzione continua in I non può mai impennarsi o oscillare eccessivamente
- DIFFERENZE CON LA CONTINUITÀ
  - **Nella definizione di continuità** il quantificatore $\forall x\in D$ compare prima del δ, pertanto δ dipenderà sia da ε sia da x, sottolineando come il concetto stesso di continuità sia puntuale. In parole povere prima si considera x e su tale punto si innesca la definizione di funzione continua in un punto; una funzione è continua su un intervallo se è continua in ogni punto dell'intervallo.
  - **Nella definizione di continuità uniforme** il quantificatore $\forall x\in D$ si posiziona subito dopo il δ e ciò assicura che tale valore non dipenda da x. In altri termini il delta è uniforme rispetto ad x, da cui il nome *continuità uniforme*. In parole povere l'uniforme continuità non è una proprietà puntuale e la corrispondenza $\varepsilon\implies\delta$ deve individuare un δ che soddisfi la definizione su tutto l'intervallo, non punto a punto.
- ESEMPI
  - La funzione costante, l'identità o una qualsiasi funzione lineare sono funzioni uniformemente continue; altri esempi sono le funzioni derivabili in un insieme convesso la cui derivata è limitata (ad esempio le funzioni seno e coseno)
  - I polinomi di grado maggiore di 1 non sono funzioni uniformemente continue sull'intera retta reale, sebbene lo siano sugli insiemi limitati
  - La funzione $f(x)=1/x$ non è uniformemente continua nell'intervallo (0,1], mostrando che funzioni continue su un insieme limitato non sono necessariamente uniformemente continue
  - Neppure aggiungendo l'ipotesi che la funzione sia limitata si ottengono funzioni uniformemente continue: ad esempio la funzione $f(x)=\sin(1/x)$ nell'intervallo (0,1] non è uniformemente continua
  - Ogni funzione lipschitziana f è uniformemente continua: dato $\varepsilon>0$, si può scegliere $\delta:=\varepsilon/K$ dove $K>0$ è una costante di Lipschitz di f
  - La lipschizianità è una condizione sufficiente ma non necessaria per l' uniforme continuità: $f(x)=1/x^3$ è Lip in $(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$ con $a>0$ (ha derivata limitata) ma non in tutto $\mathbb{R}$ ⇒ f(x) è UC in questi intervalli. Per HC f(x) è UC anche in $[-a,a]$ ⇒ f(x) è UC su tutto $\mathbb{R}$ pur non essendo Lip.
  - $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua e $\lim_{x\to+\infty} f=\ell$, $\lim_{x\to-\infty} f=m$, $\ell,m\in\mathbb{R}$ ⇒ f è UC (in generale se ammette limite agli estremi è UC)
  - $f_0,f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f_0 UC, f continua tali che $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-f_0(x))=0$ ⇒ f è UC
- TEOREMA HEINE-CANTOR
  - $f: [a,b]\to\mathbb{R}$ continua ⇒ f è anche UC
    - Si dimostra per assurdo
  - Basta che la funzione sia continua su su un insieme compatto (in $\mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e limitato)
- MODULO DI CONTINUITÀ
  - Sia $\omega:[0,+\infty]\to[0,+\infty]$, tale che
    ① $\omega(0)=0$
    ② ω monotona crescente (debolmente)
    ③ $\lim_{t\to0^+}\omega(t)=0$
  - ① $f:C\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dico che ω è un modulo di continuità per f se:
    ✧ ω soddisfa le tre proprietà
    ✧ $|f(x)-f(y)|\leq\omega(|x-y|)$
    ② f ammette un MdC se esiste ω che è un MdC per f
  - f è UC ⟺ f ammette un MdC

CONTRAZIONI

- $f:M\to M$ è una contrazione se è Lipschitziana con costante $c<1$
- PUNTO FISSO
  - M spazio metrico completo, $f:M\to M$ contrazione ⇒ $\exists!$ $x\in M$ tale che $f(x)=x$. Inoltre $\forall x_0\in M$ la succ. per ricorrenza $x_{n+1}=f(x_n)$ con dato iniziale x_0 converge a x

DISCONTINUITÀ

- $f:E\to\mathbb{R}$, $\mathrm{disc}(f)=\{x\in E \mid f \text{ non è continua in } x\}$
- TIPI DI DISCONTINUITÀ
  - ELIMINABILE
    - se $\exists\lim_{x\to x_0} f\neq f(x_0)$
      - ES: $f(x)=\{1$ se $x=0$; 0 se $x\neq0\}$
  - I SPECIE (A SALTO)
    - se $\exists\lim_{x\to x_0^{+-}} f=\ell^{+-}$ ma $\ell^+\neq\ell^-$
      - ES: sgn(x)
  - II SPECIE
    - se è di I specie e almeno uno dei due è $\pm\infty$
      - ES: $f(x)=\{1/x$ se $x\neq0$; 0 se $x=0\}$
  - III SPECIE
    - se ∄ né limite destro né limite sinistro
      - ES: $f(x)=\{\sin(1/x)$ se $x\neq0$; 0 se $x=0\}$
      - funzione di DIRICHLET: $f(x)=\{1$ $x\in\mathbb{Q}$, 0 $x\notin\mathbb{Q}\}$
        - $\mathrm{disc}(f)=\mathbb{R}$ e non esiste nessun limite
- f monotona ⇒ $|\mathrm{disc}(f)|=|\mathbb{N}|$